

**Fakultät für Physik und Astronomie
Universität Heidelberg**

Bachelor Arbeit in Physik
eingereicht von

Iris Feldt

am

19.09.2016

Untersuchung des Einflusses des schwachen Gravitationslinseneffekts auf die Temperaturkorrelation der kosmischen Hintergrundstrahlung

Diese Bachelorarbeit wurde erstellt von
Iris Feldt
am Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg
unter der Betreuung von
Prof. Dr. Björn Malte Schäfer

Abstract

In dieser Bachelorarbeit wurde die Annahme bestätigt, dass die Temperaturkorrelation der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB) durch den schwachen Gravitationslinseneffekt abnimmt.

Hierzu wurden zunächst die gelinste und ungelinste Korrelationsfunktionen berechnet und miteinander verglichen. Zudem wurde die erwartete Korrelationsfunktion des gelinsten Temperaturspektrums in niedrigster Ordnung aus dem ungelinsten Temperaturspektrum berechnet und anschließend mit sowohl der ursprünglichen als auch der gelinsten Temperaturkorrelationsfunktion verglichen.

Anschließend wurden zu bestimmten Winkelabständen die jeweilige Wahrscheinlichkeitsverteilung gezeichnet und der Korrelationskoeffizient bestimmt.

This bachelor thesis confirms the assumption, that weak gravitational lensing is reducing the temperature correlation of the cosmic microwave background (CMB).

Therefore one calculated the correlation function of the lensed and unlensed CMB as well as an approximation of the lensed correlation function out of the unlensed temperature power spectrum of the CMB.

Afterwards one calculated the correlation coefficient and plotted the probability distribution for different angular distances.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	2
2.1	Die kosmische Hintergrundstrahlung (CMB)	2
2.2	Der Gravitationslinseneffekt	2
2.3	Die Temperaturkorrelationsfunktion des ungelinsten CMB	3
2.4	Die Temperaturkorrelationsfunktion des gelinsten CMB	5
2.5	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des gelinsten und ungelinsten Temperaturfelds des CMB	6
3	Vergleich der Korrelationsfunktionen	8
3.1	Berechnung der gelinsten und ungelinsten Korrelationsfunktionen aus dem CAMB Datensatz	8
3.2	Berechnung der gelinsten Korrelationsfunktion aus C_{τ_u}	9
3.3	Vergleich der Korrelationsfunktionen	10
4	Vergleich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen	13
4.1	Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen	13
4.2	Diskussion der Wahrscheinlichkeitsverteilungen	17
5	Fazit	24

1 Einleitung

In dieser Bachelor Arbeit wird untersucht, wie der schwache Gravitationslinseneffekt die Temperaturkorrelation der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB) beeinflusst. Der schwache Gravitationslinseneffekt sorgt dafür, dass vom CMB ausgestrahlte Photonen um einen Winkel von $\sim 7 \cdot 10^{-4}$ (im Bogenmaß)[1][2] abgelenkt werden und dass die Schärfe der Temperaturschwankungen im CMB um $\sim 3\%$ [1][2] abnimmt. Diesen Effekt zu verstehen ist für die Rekonstruktion des ursprünglichen CMB wichtig, aus dem man Informationen für zum Beispiel die Entstehung, das Alter, die Ausdehnungsgeschwindigkeit sowie der Zusammensetzung des Universums erhalten kann. Das Planck-Teleskop liefert möglichst akkurate Messwerte um die theoretischen Modelle zu überprüfen.

Im Laufe dieser Bachelorarbeit wird zunächst mit Hilfe des Leistungsspektrums[4] der ungelinsten und gelinsten CMB Temperatur, die entsprechenden Korrelationsfunktionen berechnet und miteinander verglichen. Zusätzlich wird aus dem ungelinsten Temperaturleistungsspektrum die gelinste Korrelationsfunktionsfunktion in niedrigster Ordnung berechnet, um diese mit den schon zuvor bestimmten Korrelationsfunktionen zu vergleichen.

Diese können dazu genutzt werden um Wahrscheinlichkeitsverteilungen für bestimmte Multipole l und damit auch für bestimmte Winkelabstände θ zu erstellen, die Rückschlüsse auf die entsprechende Temperaturkorrelation zulassen.

2 Theorie

Das folgende Kapitel orientiert sich an den Ausführungen von A. Lewis und A. Challinor [1].

2.1 Die kosmische Hintergrundstrahlung (CMB)

Die kosmische Hintergrundstrahlung, oder kurz CMB, ist eine, das ganze Universum erfüllende, isotrope Schwarzkörperstrahlung, die circa 300.000 Jahre nach dem Urknall, zur Zeit der Rekombination, freigesetzt wurde. Der CMB hat eine annähernd homogene Temperaturverteilung mit einer Temperatur von $T = (2,72548 \pm 0,00057)\text{Kelvin}$ [5]. Diese weist kleine Anisotropien in der Größenordnung von 10^{-5} Kelvin auf, welche auf Dichteschwankungen und Strömungsgeschwindigkeiten im frühen Universum zurückzuführen sind. Die dadurch im Temperaturspektrum entstandenen Schwankungen bilden ein gaußsches Zufallsfeld, da die Temperaturwerte einer Normalverteilung folgen.

2.2 Der Gravitationslinseneffekt

Photonen können durch Gravitation abgelenkt werden. Für den lokalen Ablenkungswinkel $\delta\gamma$ gilt:

$$\delta\gamma = -2\delta\chi\nabla_{\perp}\Psi, \quad (1)$$

wobei $\delta\chi$ eine kurze Strecke entlang Photonentrajektorie ist und Ψ das Gravitationspotentials darstellt, an dem das Photon abgelenkt wird.

Für den Ablenkungswinkel $\delta\alpha$, der durch eine Quelle in χ entsteht und den man in "comoving distance" χ_* beobachten kann, gilt:

$$\delta\alpha_{\chi} = \frac{f_K(\chi_* - \chi)\delta\gamma}{f_K(\chi_*)} = -\frac{f_K(\chi_* - \chi)}{f_K(\chi_*)}2\delta\chi\nabla_{\perp}\Psi. \quad (2)$$

$f_K(\chi)$ ist die Winkeldurchmesserdistanz (angular diameter distance) für die Folgendes gilt:

$$f_K(\chi) = \begin{cases} K^{-1/2} \sin(K^{1/2})\chi & \text{für } K > 0, \\ \chi & \text{für } K = 0, \\ |K|^{-1/2} \sinh(|K|^{1/2} \chi) & \text{für } K < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Zusätzlich wurde folgende Näherung für kleine Ablenkwinkel (schwacher Gravitationslinseneffekt) verwendet:

$$f_K(\chi_* - \chi)\delta\gamma = f_K(\chi_*)\delta\alpha \quad (4)$$

Den resultierenden Ablenkwinkel α erhält man, indem man alle lokale Ablenkwinkel $\delta\alpha$ zwischen dem Beobachter und der Quelle aufaddiert. Somit gilt für den Ablenkwinkel in Abhängigkeit von dem Gradienten der Potentiale entlang der Sichtlinie des Beobachters:

$$\alpha = -2 \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{f_K(\chi_* - \chi)}{f_K(\chi_*)} \nabla_{\perp}\Psi(\chi\hat{\mathbf{n}}; \eta_0 - \chi). \quad (5)$$

$\eta_0 - \chi$ ist die "comoving distance", die das Photon hatte, als es am Ort $\chi \hat{\mathbf{n}}$ war. Dies gilt nur für kleine Ablenkwinkel und in erster Ordnung des Potentials.

Unter der Annahme, dass das Universum räumlich flach ist, gilt:

$$\frac{f_K(\chi_* - \chi)}{f_K(\chi_*)} = 1 - \frac{\chi}{\chi_*}. \quad (6)$$

Somit hängt die gelinste Temperatur T_g in Richtung $\hat{\mathbf{n}}$ mit der ungelinsten Temperatur T_u wie folgt zusammen:

$$T_g(\hat{\mathbf{n}}) = T_u(\hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\alpha}) \quad (7)$$

Das Gravitationslinsenpotential ψ wird nun unter Verwendung von:

$$\nabla_{\perp} \Psi = \frac{\nabla_{\hat{\mathbf{n}}} \Psi}{f_K(\chi)} \quad (8)$$

folgendermaßen definiert:

$$\psi(\hat{\mathbf{n}}) = -2 \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{f_K(\chi_* - \chi)}{f_K(\chi_*) f_K(\chi)} \Psi(\chi \hat{\mathbf{n}}; \eta_0 - \chi), \quad (9)$$

sodass folgende Beziehung zwischen dem resultierenden Ablenkwinkel und dem Gravitationslinsenpotential gilt:

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla_{\hat{\mathbf{n}}} \psi. \quad (10)$$

Hierbei ist $\nabla_{\hat{\mathbf{n}}}$ die kovariante Ableitung auf der durch $\hat{\mathbf{n}}$ definierten Sphäre. Der Gravitationslinseneffekt ändert also weder die Frequenzverteilung der Photonen und somit die Durchschnittstemperatur, noch die Intensität der gemessenen Schwarzkörperstrahlung. Stattdessen beobachten wir die Photonen aus einer anderen, als ihrer ursprünglichen Richtung, sie werden also umverteilt. Da dieser Effekt sehr klein ist, ist auch das gelinste Temperaturfeld ein gaußsches Zufallsfeld.

2.3 Die Temperaturkorrelationsfunktion des ungelinsten CMB

Im folgenden wird davon ausgegangen, dass das Universum räumlich flach ist. Dies wird dadurch gerechtfertigt, dass die Korrelationsfunktionen für kleine Winkelskalen untersucht werden, für die die Krümmung der Himmelskugel keine Rolle spielt.

Für die zwei dimensionale Fourier Transformation des Temperaturfelds gilt:

$$\tau_u(\boldsymbol{\beta}) = \int \frac{d^2 \mathbf{l}}{2\pi} \tau_u(\mathbf{l}) e^{i \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \quad \tau_u(\mathbf{l}) = \int \frac{d^2 \boldsymbol{\beta}}{2\pi} \tau_u(\boldsymbol{\beta}) e^{-i \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\beta}}. \quad (11)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass die Temperaturschwankungen isotrop sind. Somit gilt für den Erwartungswert:

$$\langle \tau_u(\boldsymbol{\beta}) \rangle = \langle \tau_u(\boldsymbol{\beta}') \rangle, \quad (12)$$

d.h. der Erwartungswert ist unabhängig davon, wo am Himmel gemessen wird. Deswegen kann die Korrelationsfunktion ξ_u der Temperatur nur vom Abstand der ausgewerteten Punkten abhängen:

$$\langle \tau_u(\boldsymbol{\beta}) \tau_u^*(\boldsymbol{\beta}') \rangle = \xi_u(|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'|) = \xi_u(\theta). \quad (13)$$

Hier wurde θ so gewählt, dass gilt:

$$\theta = |\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'|.$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \tau_u(\mathbf{l}) \tau_u^*(\mathbf{l}') \rangle &= \left\langle \int \frac{d^2\boldsymbol{\beta}}{2\pi} \int \frac{d^2\boldsymbol{\beta}'}{2\pi} e^{-i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\beta}} \tau_u(\boldsymbol{\beta}) e^{i\mathbf{l}'\cdot\boldsymbol{\beta}'} \tau_u(\boldsymbol{\beta}') \right\rangle \\ &= \int \frac{d^2\boldsymbol{\beta}}{2\pi} \int \frac{d^2\boldsymbol{\beta}'}{2\pi} e^{-i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\beta}} e^{i\mathbf{l}'\cdot\boldsymbol{\beta}'} \xi_u(\theta) \\ &= \int \frac{d^2\boldsymbol{\beta}}{2\pi} \int \frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{2\pi} e^{i(\mathbf{l}-\mathbf{l}')\cdot\boldsymbol{\beta}} e^{i\mathbf{l}'\cdot\boldsymbol{\theta}} \xi_u(\theta) \\ &= \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}') \int d^2\boldsymbol{\theta} e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\theta}} \xi_u(\theta). \end{aligned} \quad (14)$$

In der dritten Zeile wurde $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'$ gesetzt.

Das ungelinste Leistungsspektrum der Temperatur wird wie folgt definiert:

$$C_{\tau_u}(l) = \int d^2\boldsymbol{\theta} e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\theta}} \xi_u(\theta) = \int \theta d\theta \int d\phi_{\boldsymbol{\theta}} e^{i\theta \cos(\phi_1 - \phi_{\boldsymbol{\theta}})} \xi_u(\theta) = 2\pi \int \theta d\theta J_0(l\theta) \xi_u(\theta), \quad (15)$$

Hier wurde die Definition der zylindrische Bessel-Funktion:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{i(n\phi - x \sin(\phi))}$$

verwendet.

Somit ist das Leistungsspektrum des isotropen Temperaturfeldes diagonal in \mathbf{l} und die Korrelationsfunktion im Fourierraum hat folgende Form:

$$\langle \tau_u(\mathbf{l}) \tau_u^*(\mathbf{l}') \rangle = C_{\tau_u}(l) \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}'). \quad (16)$$

Daraus folgt für die Korrelationsfunktion der Temperatur im Ortsraum:

$$\begin{aligned} \xi_u(\theta) &= \int \frac{d^2\mathbf{l}}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{l}'}{2\pi} e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\beta}} e^{-i\mathbf{l}'\cdot\boldsymbol{\beta}'} \langle \tau_u(\mathbf{l}) \tau_u^*(\mathbf{l}') \rangle \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{l}}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{l}'}{2\pi} e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\beta}} e^{-i\mathbf{l}'\cdot\boldsymbol{\beta}'} C_{\tau_u}(l) \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}') \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{l}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{l}\cdot(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}')} C_{\tau_u}(l) \\ &= \int \frac{l dl}{2\pi} \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{i\theta \cos(\phi)} C_{\tau_u}(l) \\ &= \int \frac{l dl}{2\pi} C_{\tau_u}(l) J_0(l\theta). \end{aligned} \quad (17)$$

Hier wurde vorausgesetzt, dass $\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\beta} = l\beta \cos(\phi)$ gilt, wobei ϕ der Winkel zwischen \mathbf{l} und $\boldsymbol{\beta}$ ist.

2.4 Die Temperaturkorrelationsfunktion des gelinsten CMB

Für das gelinste Temperaturfeld gilt:

$$\tau_g(\boldsymbol{\beta}) = \tau_u(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}), \quad (18)$$

wobei $\boldsymbol{\alpha} = \nabla_{\hat{n}}\psi$ der Ablenkungswinkel ist, der durch den schwachen Gravitationslinseneffekt auftritt. Somit gilt für die gelinste Korrelationsfunktion:

$$\begin{aligned} \xi_g(\theta) &= \langle \tau_g(\boldsymbol{\beta}) \tau_g^*(\boldsymbol{\beta}') \rangle \\ &= \langle \tau_u(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}) \tau_u^*(\boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{\alpha}') \rangle \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{l}}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{l}'}{2\pi} \left\langle e^{i\mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha})} e^{-i\mathbf{l}' \cdot (\boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{\alpha}')} \right\rangle_{\boldsymbol{\alpha}} \langle \tau_u(\mathbf{l}) \tau_u(\mathbf{l}') \rangle_{\tau} \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{l}}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{l}'}{2\pi} e^{i(\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{l}' \cdot \boldsymbol{\beta}')} \left\langle e^{i(\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{l}' \cdot \boldsymbol{\alpha}')} \right\rangle_{\boldsymbol{\alpha}} C_{\tau_u}(l) \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}') \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{l}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\theta}} C_{\tau_u}(l) \left\langle e^{i\mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}')} \right\rangle_{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned} \quad (19)$$

$$= \int \frac{d^2\mathbf{l}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\theta}} C_{\tau_u}(l) e^{-\frac{1}{2} \langle [\mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}')]^2 \rangle}, \quad (20)$$

mit $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'$ und Vernachlässigung von kleinen Korrelationen zwischen der Temperatur des CMB und dem Ablenkungspotential, das durch den Gravitationslinseneffekt entsteht. Die Umformung von der vorletzten Zeile zu Gleichung 20 ist möglich, da angenommen wird, dass $\boldsymbol{\alpha}$ ein gaußsches Zufallsfeld und damit $\mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}')$ eine gaußsche Zufallsvariable ist. Für den Korrekturterm gilt:

$$\langle [\mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}')]^2 \rangle = l^2 [\sigma_{\alpha}^2(\theta) + \cos(2\phi) C_{gl,2}(\theta)]. \quad (21)$$

Hier ist $2\sigma_{\alpha}^2(\theta)$ die Varianz der relativen Ablenkung zweier Punkte. Sie ist wie folgt definiert:

$$\sigma_{\alpha}^2(\theta) = C_{gl}(0) - C_{gl}(\theta) = \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}')^2 \rangle. \quad (22)$$

Für $C_{gl}(\theta)$ und $C_{gl,2}(\theta)$ gelten folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} C_{gl}(\theta) &= \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}' \rangle \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{l}}{(2\pi)^2} l^2 C_{\psi}(l) e^{i\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\theta}} \\ &= \int \frac{dl}{2\pi} l^3 C_{\psi}(l) J_0(l\theta) \end{aligned} \quad (23)$$

$$= \int \frac{dl}{\pi} \frac{2}{l} C_{\kappa}(l) J_0(l\theta), \quad (24)$$

$$C_{gl,2}(\theta) = \int \frac{dl}{2\pi} l^3 C_{\psi}(l) J_2(l\theta). \quad (25)$$

C_ψ ist das Leistungsspektrum des Gravitationslinsenpotentials. Für κ und ψ gilt im Ortsraum folgende Beziehung:

$$\Delta\psi = 2\kappa \quad (26)$$

und somit im Fourierraum:

$$\begin{aligned} l^2\psi &= 2\kappa, \\ \psi &= \frac{2}{l^2}\kappa. \end{aligned} \quad (27)$$

Somit gilt folgende Relation:

$$C_\psi = \frac{4}{l^4}C_\kappa. \quad (28)$$

Aus Gleichung 24 und 25 folgt für die gelinste Korrelationsfunktion:

$$\begin{aligned} \xi_g(\theta) &= \int \frac{d^2\mathbf{l}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\theta}} C_{\tau_u}(l) e^{-\frac{1}{2}\langle[\mathbf{l}\cdot(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}')]^2\rangle} \\ &= \int \frac{ldl}{2\pi} \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{il\theta\cos(\phi)} C_{\tau_u}(l) e^{-\frac{1}{2}l^2[\sigma_\alpha^2(\theta)+\cos(2\phi)C_{gl,2}]} \end{aligned} \quad (29)$$

$$= \int \frac{dl}{2\pi} l C_g(\theta) J_0(l\theta). \quad (30)$$

Der schwache Gravitationslinseneffekt führt also dazu, dass die vom CMB ausgestrahlten Photonen eine Art "random walk" vollführen, wodurch sich die Temperaturkorrelation des gelinsten im Vergleich zum ungelinsten CMB verringert. In Kapitel 3.2 der vorliegenden Arbeit wird folgende Näherung verwendet:

$$\begin{aligned} \xi_{g_2}(\theta) &= \int \frac{ldl}{2\pi} \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{il\theta\cos(\phi)} C_{\tau_u}(l) e^{-\frac{1}{2}l^2\sigma_\alpha^2(\theta)} \\ &= \int \frac{dl}{2\pi} l C_{\tau_u}(l) e^{-\frac{1}{2}l^2\sigma_\alpha^2(\theta)} J_0(l\theta). \end{aligned} \quad (31)$$

Diese erhält man, indem man die Taylor Entwicklung von

$$e^{-\frac{1}{2}l^2\cos(2\phi)C_{gl,2}}$$

nach der nullten Ordnung in $C_{gl,2}$ abbricht.

2.5 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des gelinsten und ungelinsten Temperaturfelds des CMB

Da sowohl für das gelinste als auch für das ungelinste Temperaturfeld angenommen wird, dass sie gaußsche Zufallfelder sind, kann für ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung von einer bivariaten Normalverteilung ausgegangen werden:

$$p(\tau_x, \tau_y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \cdot \det(\text{Cov})}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{pmatrix}^t \text{Cov}^{-1} \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{pmatrix} \right]. \quad (32)$$

Dabei ist Cov^{-1} das Inverse der Kovarianzmatrix Cov , die wie folgt definiert ist:

$$\text{Cov} = \begin{pmatrix} \langle \tau_x^2 \rangle & \xi(\theta) \\ \xi(\theta) & \langle \tau_y^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (33)$$

Ist τ_x statistisch unabhängig von τ_y , so gilt für die Korrelationsfunktion $\xi(\theta)$:

$$\xi(\theta) = 0,$$

und aus Gleichung 32 ergibt sich für diesen Fall:

$$\begin{aligned} p(\tau_x, \tau_y) &= p(\tau_x) \cdot p(\tau_y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \tau_x^2 \rangle}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \tau_y^2 \rangle}} \cdot \exp \left[-\frac{\tau_x^2}{2 \langle \tau_x^2 \rangle} \right] \cdot \exp \left[-\frac{\tau_y^2}{2 \langle \tau_y^2 \rangle} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Für homogene Felder ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(\tau_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp \left[-\frac{\tau_x^2}{2\sigma^2} \right] \quad (35)$$

unabhängig von der Ortskoordinate \vec{x} . Deshalb gilt für die Varianz von homogene Felder:

$$\langle \tau_x^2 \rangle = \langle \tau_y^2 \rangle = \sigma^2, \quad (36)$$

und somit ergibt sich

$$\text{Cov} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \xi(\theta) \\ \xi(\theta) & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

3 Vergleich der Korrelationsfunktionen

3.1 Berechnung der gelinsten und ungelinsten Korrelationsfunktionen aus dem CAMB Datensatz

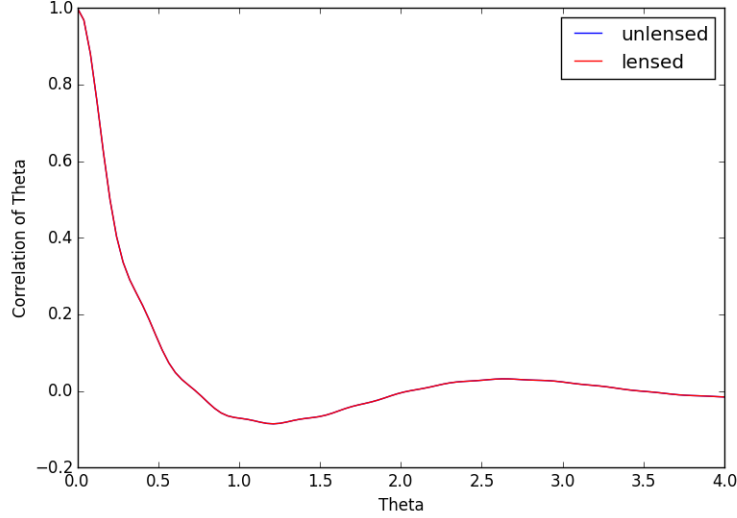


Abbildung 1: gelinste ξ_g (rote Kurve) und ungelinste ξ_u (blaue Kurve) Korrelationsfunktion der Temperatur des CMB in Abhängigkeit des Winkelabstandes θ , berechnet aus dem CAMB Datensatz [4].

Zunächst wurde anhand des Leistungsspektrums der Temperatur $C_\tau(\mathbf{l})$, der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB), das im CAMB Datensatz von Anthony Lewis und Anthony Challinor [4] bestimmt wurde, die Korrelationsfunktionen der Temperatur für den Fall, dass kein Gravitationslinseneffekt auftritt (ungelinst) und dass Gravitationslinseneffekte auftreten (gelinst), numerisch berechnet. Hierfür wurde Gleichung 17 bzw. 30 verwendet. Da es sich bei den verwendeten Leistungsspektren um diskrete Werte handelt, wurde statt zu integrieren der Integrand wie folgt aufsummiert:

$$\xi_{g,u}(\Theta) = \sum_{l'=200}^{1,8 \cdot 10^5} \frac{\Delta l}{2\pi} (\Delta l \cdot l') \cdot C_{\tau,g,u}(\lfloor \Delta l \cdot l' \rfloor) \cdot J_0((\Delta l \cdot l') \cdot \theta) \quad (38)$$

Die Indizes g bzw. u stehen für den gelinsten bzw für den ungelinsten Fall. Der Summationsabstand Δl wurde so gewählt, dass die Besselfunktion J_0 gut aufgelöst wird. Es wurde der Wert $\Delta l = 0,01$ gewählt. Es wurde über l' aufsummiert, das wie folgt definiert ist:

$$l' = \frac{l}{\Delta l}.$$

Für $C_{\tau,g,u}(l)$ standen nur Werte von $l = 2$ bis $l = 1800$ zur Verfügung, deshalb läuft die Summation von $l'_1 = \frac{2}{0,01} = 200$ bis $l'_2 = \frac{1800}{0,01} = 1,8 \cdot 10^5$. Dieser Wertebereich kommt dadurch

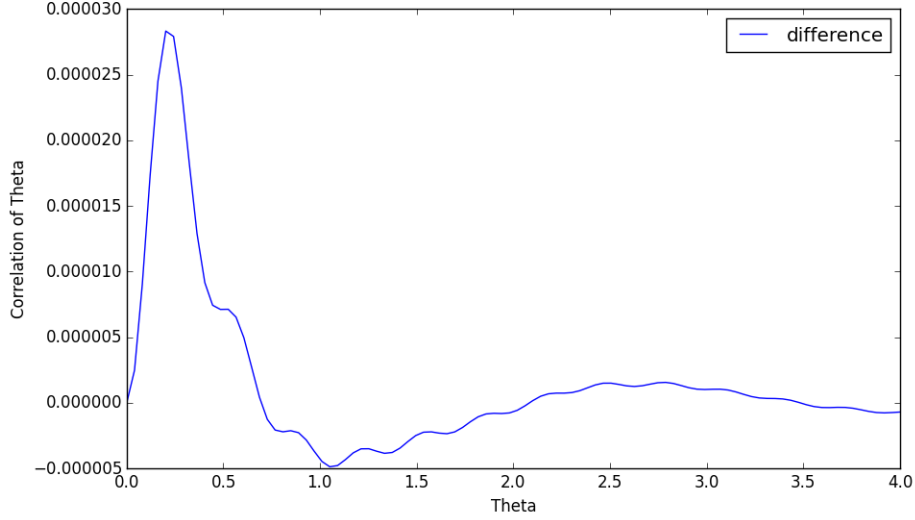


Abbildung 2: Differenz $\xi_u - \xi_g$ aus der gelinsten und ungelinsten Korrelationsfunktion in Abhängigkeit vom Winkelabstand θ . Beide Korrelationsfunktionen wurden mit Hilfe des CAMB Datensatzes [4] berechnet.

zu Stande, dass das Leistungsspektrum des CMB erst ab dem Quadrupol ($l = 2$) kosmologische Informationen beinhaltet, da die Anisotropien des CMB auf Dichteschwankungen und Strömungsgeschwindigkeiten im frühen Universum zurückzuführen sind. Für mehrere tausend große l ist der CMB wiederum strukturlos.

Die Korrelationsfunktionen mit und ohne Auftreten des Gravitationslinseneffektes in Abhängigkeit des Winkelabstandes θ , der im Verlauf dieser Arbeit im Bogenmaß angegeben ist, sind in Abb. 1 zu sehen. Um diese besser miteinander vergleichen zu können, wurde anschließend noch die Differenz aus beiden Korrelationsfunktionen gebildet und über θ aufgetragen. Dies ist in Abb. 2 dargestellt.

3.2 Berechnung der gelinsten Korrelationsfunktion aus C_{τ_u}

Im Folgenden wurde, ausgehend vom ungelinsten CAMB Datensatz [4], die gelinste Korrelationsfunktion in erster Näherung mit Gleichung 31 numerisch berechnet. Aus den in 3.1 schon genannten Gründen wurde auch hier der Integrand aufsummiert, was zu folgender Gleichung führt:

$$\xi_{g_2}(\theta) = \sum_{l'=200}^{1,8 \cdot 10^5} \frac{\Delta l}{2\pi} (\Delta l \cdot l') \cdot C_{\tau_u}([\Delta l \cdot l']) \cdot J_0((\Delta l \cdot l') \cdot \theta) \cdot \exp\left(-\frac{(\Delta l \cdot l')^2 \sigma_\alpha^2(\theta)}{2}\right), \quad (39)$$

wobei $\sigma_\alpha^2(\theta)$ wie folgt definiert ist:

$$\sigma_\alpha^2(\theta) = C_{gl}(0) - C_{gl}(\theta), \quad (40)$$

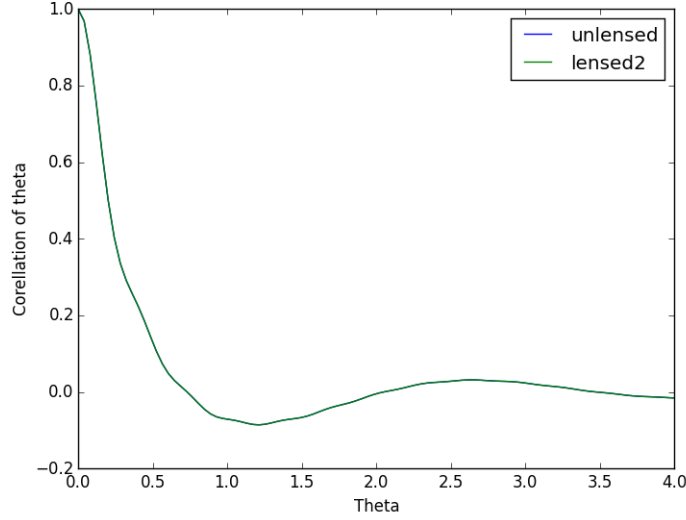


Abbildung 3: gelinste ξ_{g_2} (grüne Kurve) und ungelinste ξ_u (blaue Kurve) Korrelationsfunktion der Temperatur des CMB in Abhängigkeit des Winkelabstandes θ , die gelinste Kurve wurde aus dem CAMB Datensatz [4] für die ungelinste Temperaturkorrelation berechnet.

mit

$$C_{gl}(\theta) = \sum_{l'=10^3}^{9,999 \cdot 10^5} \frac{2 \cdot \Delta l}{\pi} \cdot \frac{1}{\Delta l \cdot l'} \cdot C_{\kappa}(\lfloor \Delta l \cdot l' \rfloor) \cdot J_0((\Delta l \cdot l') \cdot \theta), \quad (41)$$

Der Summationsabstand Δl wurde auf 0,01 festgelegt. Wie schon in Kapitel 3.1 wurde über l' , das wie folgt definiert ist:

$$l' = \frac{l}{\Delta l},$$

aufsummiert. Die Werte für C_{κ} wurden aus dem CAMB Datensatz [4] entnommen.

Die berechnete Korrelationsfunktion wurde zusammen mit der in 3.1 berechneten ungelinsten Korrelationsfunktion in Abb. 3 über θ , aufgetragen. Um die hier berechnete Korrelationsfunktion mit den oben bestimmten Korrelationsfunktionen vergleichen zu können, wurde die Differenz aus diesen gebildet und über θ aufgetragen. Die Differenz aus dem hier bestimmten gelinsten Spektrum und dem ungelinsten Spektrum ist in Abb. 4 und die Differenz aus beiden gelinsten Spektren in Abb. 5 zu sehen.

3.3 Vergleich der Korrelationsfunktionen

Für alle Temperaturkorrelationsfunktionen gilt, dass sie laut Definition ihr Maximum bei einem Winkelabstand von $\theta = 0$ haben. Danach ist sie streng monoton fallend, bis sie ab einem Wert

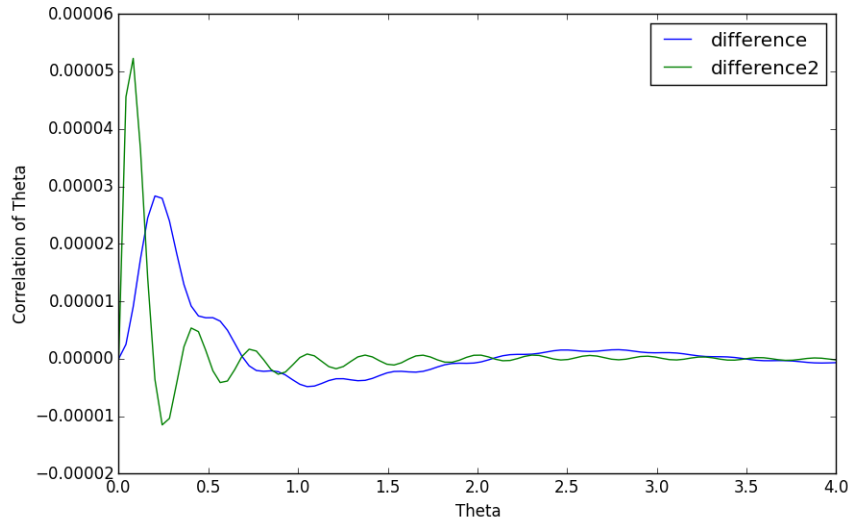


Abbildung 4: blaue Kurve: Differenz $\xi_u - \xi_g$ aus der ungelinsten Korrelationsfunktion ξ_u und der gelinsten Korrelationsfunktion ξ_g . Beide Korrelationsfunktionen wurden mit Hilfe des CAMB Datensatzes [4] berechnet.

grüne Kurve: Differenz $\xi_u - \xi_{g_2}$ aus der ungelinsten Korrelationsfunktion ξ_u und der in Näherung berechneten gelinsten Korrelationsfunktion ξ_{g_2} in Abhängigkeit vom Winkelabstand θ .

von $\theta \sim 0,8$ um den Wert Null schwanken. Vergleicht man nun die ungelinste Temperaturkorrelationsfunktion $\xi_u(\theta)$ mit der in Kapitel 3.1 bestimmten gelinsten Temperaturkorrelationsfunktion $\xi_g(\theta)$, so fällt auf, dass der Unterschied, der durch den Gravitationslinseneffekt auftritt, sehr klein ist. Für das Maximum der Differenzfunktion (siehe Abb. 2) gilt:

$$(\xi_u - \xi_g)_{max} \lesssim 3 \cdot 10^{-5}.$$

Zudem sind die Werte der Differenzfunktion für sowohl Winkelabstände bis ca $\theta = 0.7$ als auch für Winkelabstände ab $\theta = 2$ positiv, was bedeutet, dass für diesen Bereich die Korrelation der gelinsten Temperatur kleiner als die der ungelinsten ist. Also sorgt der Gravitationslinseneffekt dafür, dass die Temperaturen des CMB unkorrelierter erscheinen. Der Bereich in dem die Differenzfunktion negativ ist bzw das leichte Schwanken um die Null für $\theta \sim 0,8$ lässt sich vermutlich auf das Schwanken der Korrelationsfunktionen zurückführen.

Im zweiten Teil dieses Kapitels wurde die gelinste Temperaturkorrelation $\xi_{g_2}(\theta)$ mit Hilfe des ungelinsten Temperaturspektrums in niedrigster Ordnung berechnet. Vergleicht man nun diese genäherte gelinste Korrelationsfunktion mit der ungelinsten Korrelationsfunktion, so fällt auf, dass auch hier der auftretende Effekt sehr klein sein muss (siehe Abb. 3). Zudem verringert auch diese Näherung Temperaturkorrelationen zu kleinen Winkeln (siehe dazu Abb. 4). Es ist also festzustellen, dass diese Näherung der vollständig gelinsten Korrelationsfunktion qualitativ ähnelt. Das Maximum der genäherten Differenzfunktion ist jedoch zu kleineren θ s hin verschoben und auch fast doppelt so groß wie bei der in Kapitel 3.1 bestimmten Differenzfunktion. Zudem schwankt die genäherte Differenzfunktion stärker um die Null als dies bei der nicht

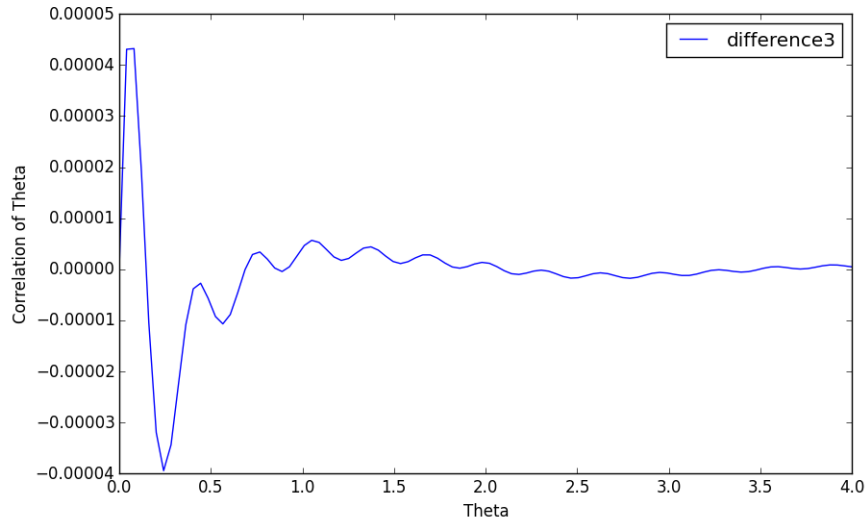


Abbildung 5: Differenz $(\xi_g - \xi_{g_2})$ aus der gelinsten Korrelationsfunktion ξ_g und der in Näherung berechneten gelinsten Korrelationsfunktion ξ_{g_2} in Abhängigkeit vom Winkelabstand θ .

genäherten der Fall ist.

Um die genäherte und nicht genäherte gelinste Korrelationsfunktion besser miteinander vergleichen zu können wurde zusätzlich die Differenz $(\xi_g - \xi_{g_2})(\theta)$ aus ihnen gebildet und über die Winkeldistanz θ in Abb. 5 aufgetragen. Für $\theta < 0,2$ wird in dieser Näherung die Korrelation der Temperatur um maximal $4 \cdot 10^{-5}$ unterschätzt, für $0,2 < \theta < 0,8$ jedoch um den gleichen Maximalwert überschätzt, danach nähern sich beide Funktionen immer weiter an und ihre Abweichungen sind nur noch minimal.

4 Vergleich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen

4.1 Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Aus den in Kapitel 3 bestimmten Korrelationsfunktionen wurden zu mehreren Winkelabständen θ mit Gleichung 37 die zugehörigen Kovarianzmatrizen bestimmt. Zusätzlich wurde der jeweilige Korrelationskoeffizient bestimmt, der sich wie folgt berechnet:

$$r = \left| \frac{\xi(\theta)}{\langle \tau^2 \rangle} \right|. \quad (42)$$

Die Korrelationskoeffizienten sind in Tabelle 1 aufgelistet. Ein Korrelationskoeffizient von $r = 0$

l	$r_u(l)$	$r_g(l)$	$r_{g2}(l)$
3	0,0738554825679	0,0738506319233	0,0738562777301
10	0,299666004838	0,299646380494	0,299671805244
30	0,809941838776	0,809927906936	0,809896875335
100	0,980651888883	0,980650365330	0,980616964227
300	0,997826472344	0,997826300167	0,997820992293
1000	0,999804137724	0,999804122198	0,999803624035
3000	0,999978235132	0,999978233407	0,999978177850

Tabelle 1: Korrelationskoeffizienten der ungelinsten $r_u(l)$ und der gelinsten $r_g(l)$ bzw der genäherten gelinsten $r_{g2}(l)$ CMB Temperatur für verschiedene Multipole l

entspricht dem Fall, dass die Temperaturen, zu dem gewählten Winkelabstand $\theta = \frac{\pi}{l}$, unkorreliert sind. Ist $0 < r < 1$ so korrelieren die Temperaturen umso stärker, je größer der Wert für r ist. Somit ist der Korrelationskoeffizient ein Maß dafür, wie stark die Temperaturen im gewählten Winkelabstand θ korrelieren.

Anschließend wurde aus jeder der bestimmten Kovarianzmatrizen ein zwei dimensionales Diagramm der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellt, wobei die Elliptizität der Verteilung mit der Korrelation zunimmt. Hat man also einen Korrelationskoeffizienten von $r = 0$ so wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Kreis abgebildet. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind in Abbildung 6 bis Abbildung 11 zu sehen. Es wurden lediglich die ungelinsten Verteilungen abgebildet, da der Unterschied zwischen gelinst und ungelinst aufgrund der gewählten Maßstäbe nicht erkennbar wäre.

Um die Wahrscheinlichkeitsverteilungen miteinander vergleichen zu können, wurde nun der Betrag der Differenz der ungelinsten und gelinsten sowie der ungelinsten und in Näherung berechneten gelinsten Wahrscheinlichkeitsverteilung in Abb. 12-23 abgebildet.

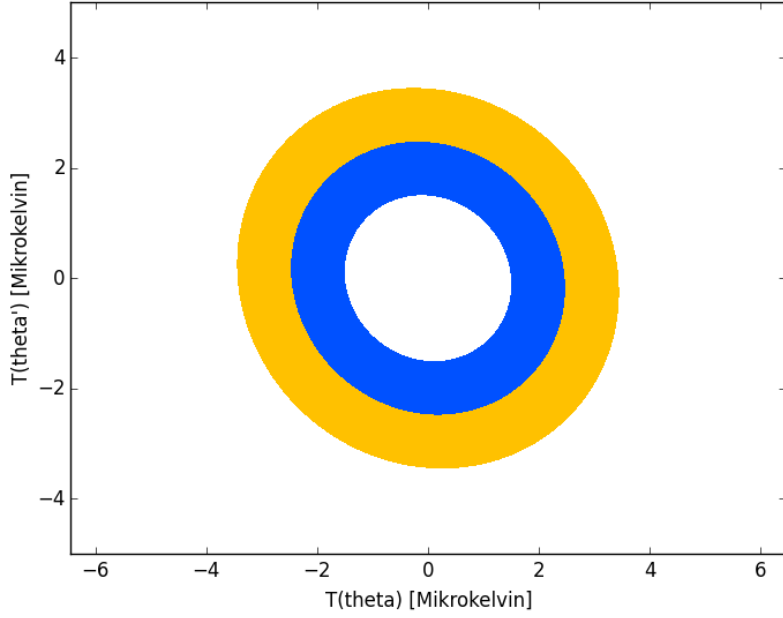


Abbildung 6: Wahrscheinlichkeitsverteilung der ungelinsten kosmischen Hintergrundstrahlung für $l=3$

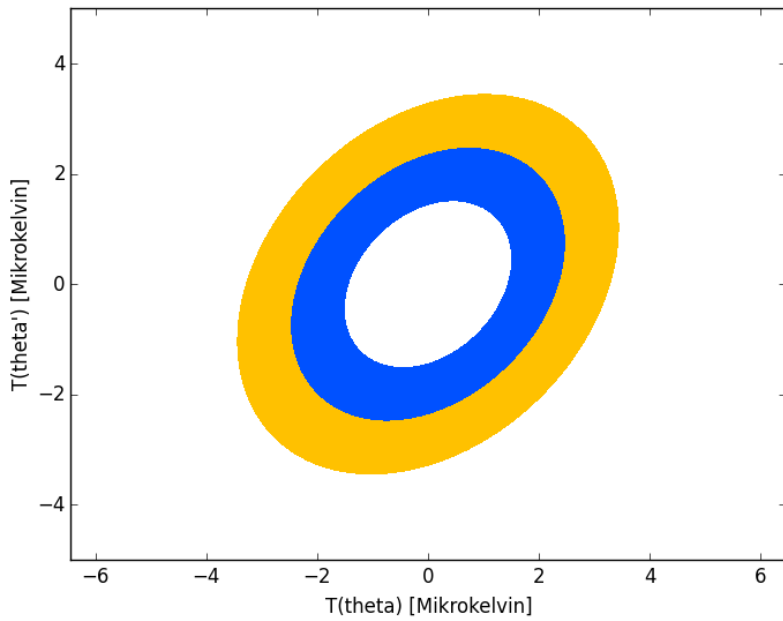


Abbildung 7: Wahrscheinlichkeitsverteilung der ungelinsten kosmischen Hintergrundstrahlung für $l=10$

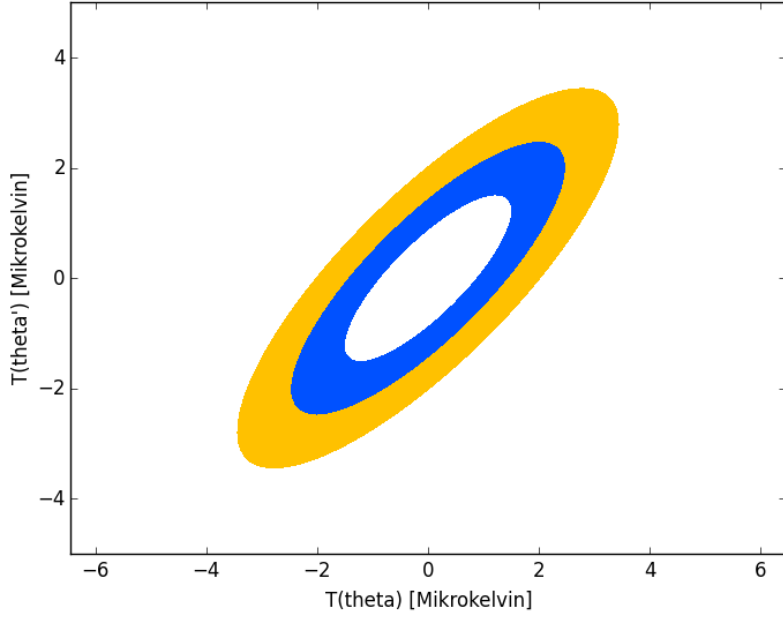


Abbildung 8: Wahrscheinlichkeitsverteilung der ungelinsten kosmischen Hintergrundstrahlung für $l=30$

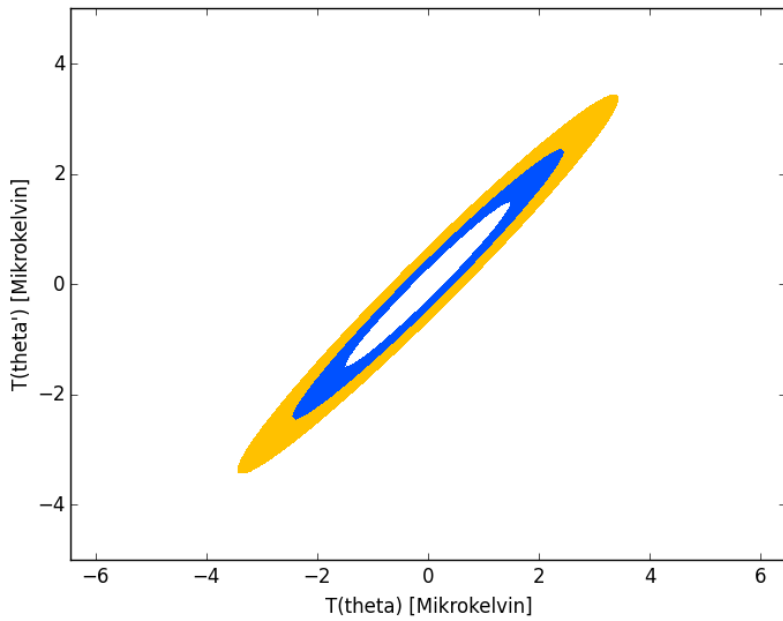


Abbildung 9: Wahrscheinlichkeitsverteilung der ungelinsten kosmischen Hintergrundstrahlung für $l=100$

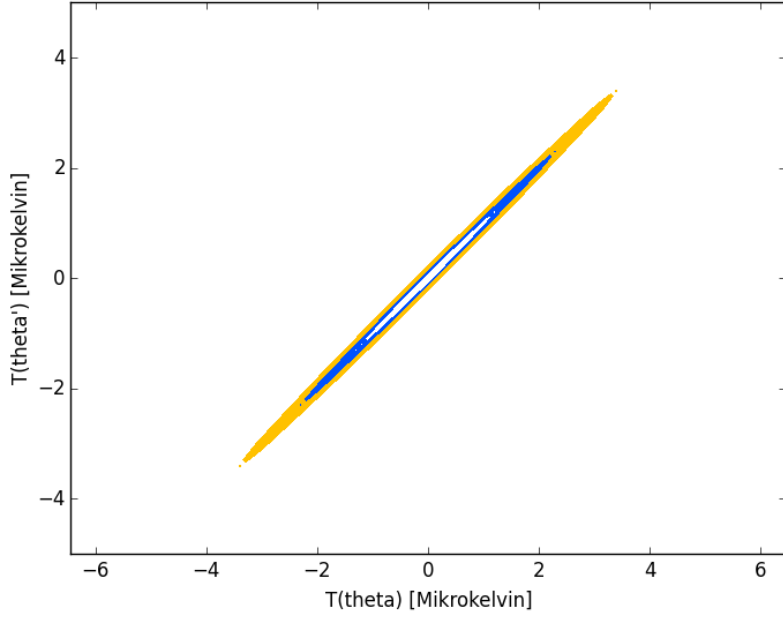


Abbildung 10: Wahrscheinlichkeitsverteilung der ungelinsten kosmischen Hintergrundstrahlung für $l=300$

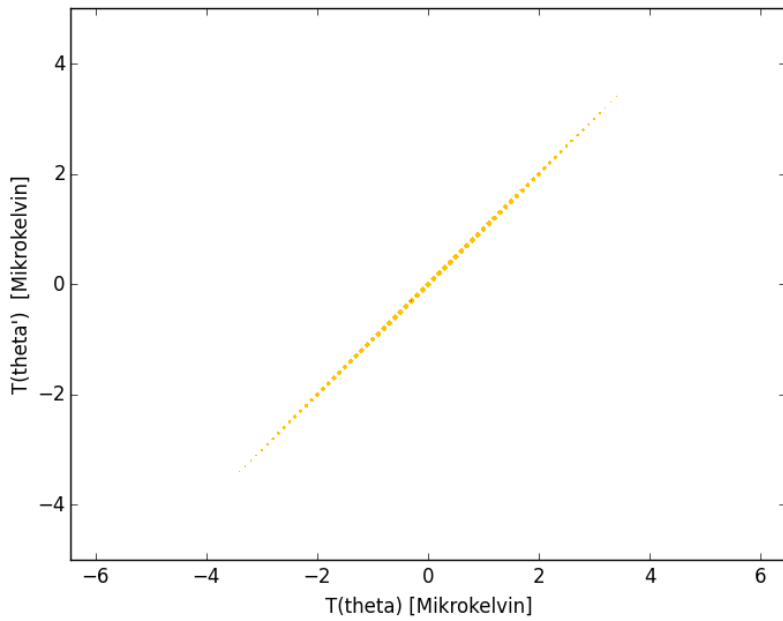


Abbildung 11: Wahrscheinlichkeitsverteilung der ungelinsten kosmischen Hintergrundstrahlung für $l=1000$

4.2 Diskussion der Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Sowohl anhand der Korrelationskoeffizienten als auch der Wahrscheinlichkeitsverteilungen lässt sich beobachten, dass die Korrelation für zunehmende Multipole l bzw. abnehmende Winkelabstände θ zunimmt. Dies ist daran zu erkennen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit zunehmenden Multipol l elliptischer (siehe Abb. 6 - 11) und die Korrelationskoeffizienten, die in Tabelle 1 aufgelistet sind, größer werden.

Um die Korrelationskoeffizienten besser vergleichen zu können wurde die Differenz der jeweiligen Korrelationskoeffizienten in Tabelle 2 aufgetragen. Vergleicht man den Korrelationskoeffizien-

l	$(\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_g)(l)$	$(\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_{g_2})(l)$	$(\mathbf{r}_g - \mathbf{r}_{g_2})(l)$
3	$4,8506446 \cdot 10^{-6}$	$-7,951622 \cdot 10^{-7}$	$-5,6458068 \cdot 10^{-6}$
10	$1,9624344 \cdot 10^{-5}$	$-5,800406 \cdot 10^{-6}$	$-2,542475 \cdot 10^{-5}$
30	$1,393184 \cdot 10^{-5}$	$4,4963441 \cdot 10^{-5}$	$3,1031601 \cdot 10^{-5}$
100	$1,523553 \cdot 10^{-6}$	$3,4924656 \cdot 10^{-5}$	$3,3401103 \cdot 10^{-5}$
300	$1,72177 \cdot 10^{-7}$	$5,480051 \cdot 10^{-6}$	$5,307874 \cdot 10^{-6}$
1000	$1,5526 \cdot 10^{-8}$	$5,13689 \cdot 10^{-7}$	$4,98163 \cdot 10^{-7}$
3000	$1,725 \cdot 10^{-9}$	$5,7282 \cdot 10^{-8}$	$5,5557 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 2: Differenz aus dem ungelinsten r_u und dem r_g gelinsten Korrelationskoeffizienten, aus dem ungelinsten r_u und dem in Näherung gelinsten Korrelationskoeffizienten r_{g_2} sowie aus dem gelinsten r_g und dem in Näherung gelinsten r_{g_2} Korrelationskoeffizienten für verschiedene Multipole l .

ten des ungelinsten CMB $r_u(l)$ mit dem des gelinsten CMB $r_g(l)$ (siehe hierfür Tabelle 2), so fällt auf, dass der Korrelationskoeffizient des ungelinsten CMB stets größer ist als der des gelinsten, wobei der Unterschied klein ist. Die Differenz liegt in der Größenordnungen von 10^{-5} bis 10^{-9} . Dies bestätigt, dass der Gravitationslinseneffekt die Korrelationsfunktion des CMB nur leicht verändert, und zwar in der Gestalt, dass die Temperaturen des ungelinsten CMB stärker korrelieren als die des gelinsten CMB. Um den Unterschied zwischen dem gelinsten und dem ungelinsten CMB sichtbar zu machen wurde in Abb. 12 - 17 der Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufgetragen.

Vergleicht man nun die Korrelationskoeffizienten des ungelinsten CMB mit denen des genäherten gelinsten Korrelationskoeffizienten $r_{g_2}(l)$ fällt zunächst auf, dass für $l = 3$ und $l = 10$ die Temperaturen des gelinsten CMB stärker korrelieren als die des ungelinsten. Dies stimmt mit der Beobachtung in Kapitel 3 überein, dass diese Näherung für $\theta > 0,2$ die Korrelation der gelinsten Temperaturen überschätzt. Für $l > 10$ ist die Korrelation des gelinsten Temperaturfelds wie erwartet kleiner als die des ungelinsten (vergleiche hierfür Tabelle 2 Spalte 2). Außerdem ist dieser Effekt sehr klein. Die Differenz der Korrelationskoeffizienten liegt in der Größenordnung von 10^{-5} bis 10^{-8} und ist damit größer als die Differenz aus $r_u(l)$ und $r_g(l)$. Auch dies stimmt mit der Beobachtung aus Kapitel 3 überein, dass für $\theta < 0,2$ und damit für $l > 10$, die hier verwendete Näherung, Korrelationen des gelinsten CMB unterschätzt. Dieses Verhalten kann auch in der dritten Spalte von Tabelle 2 nachvollzogen werden. Um den Unterschied zwischen

dem genäherten, gelinsten und dem ungelinsten CMB sichtbar zu machen wurde in Abb. 18 - 23 der Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufgetragen.

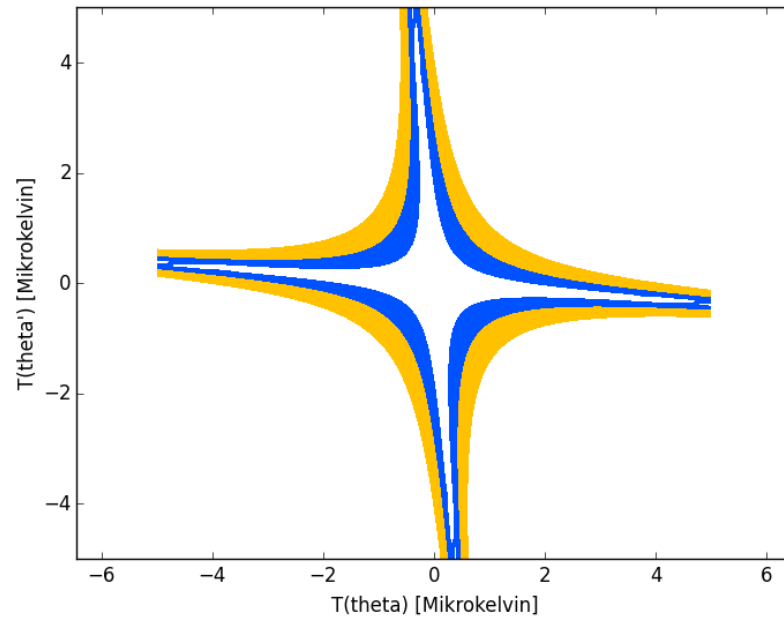


Abbildung 12: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des gelinsten und ungelinsten CMB für $l=3$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^6 vergrößert.

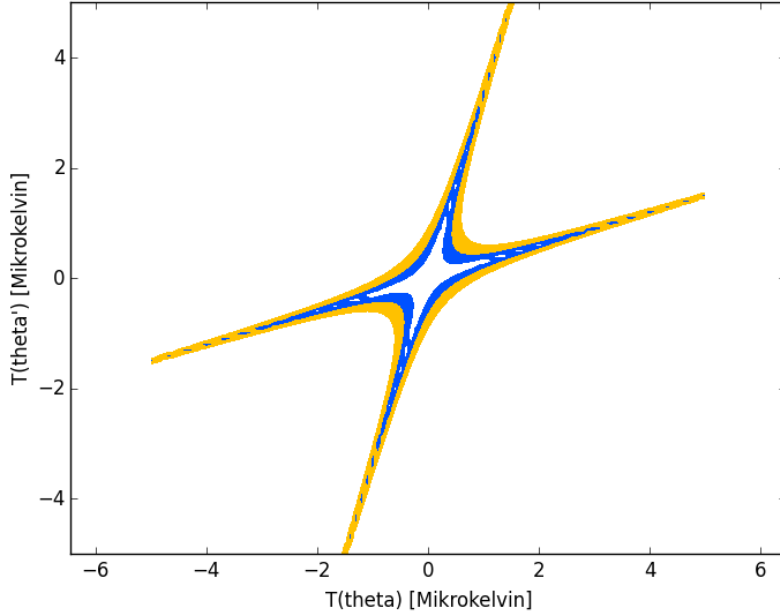


Abbildung 13: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des gelinsten und ungelinsten CMB für $l=10$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^6 vergrößert.

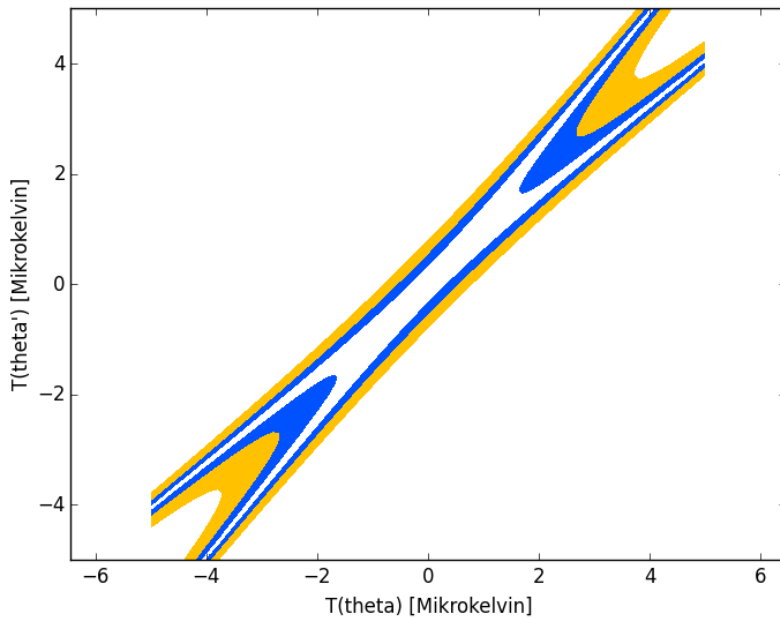


Abbildung 14: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des gelinsten und ungelinsten CMB für $l=30$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^5 vergrößert.

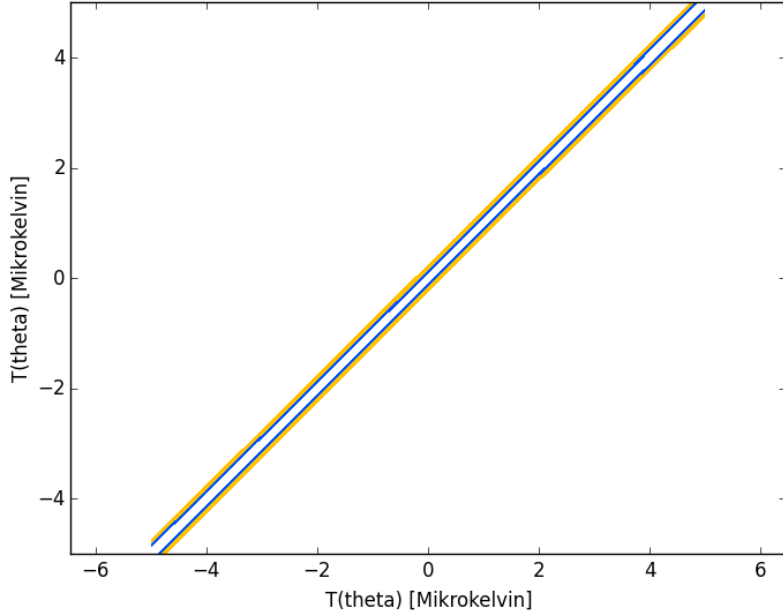


Abbildung 15: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des gelinsten und ungelinsten CMB für $l=100$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^5 vergrößert.

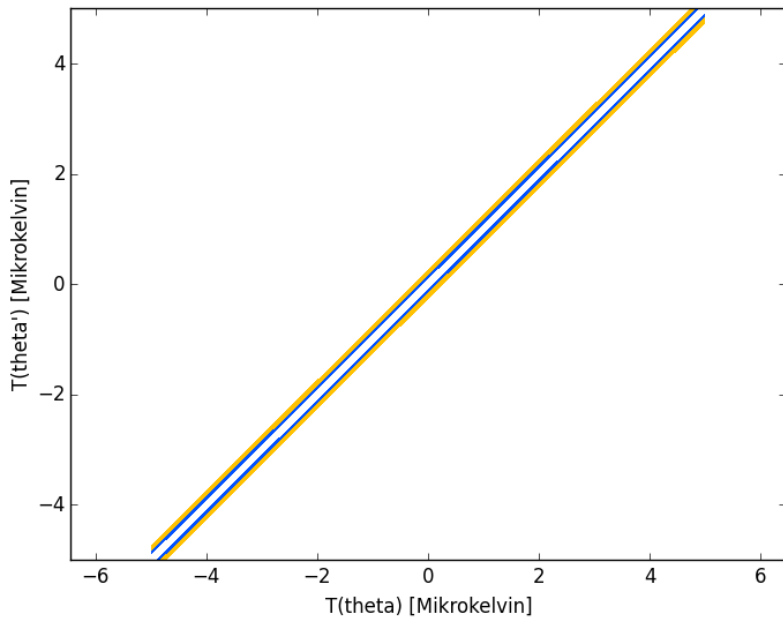


Abbildung 16: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des gelinsten und ungelinsten CMB für $l=300$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^4 vergrößert.

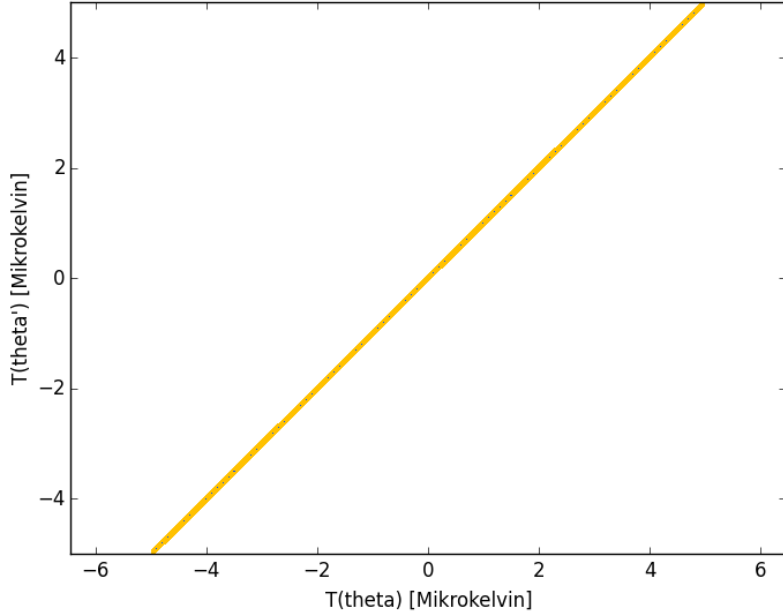


Abbildung 17: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des gelinsten und ungelinsten CMB für $l=1000$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^4 vergrößert.

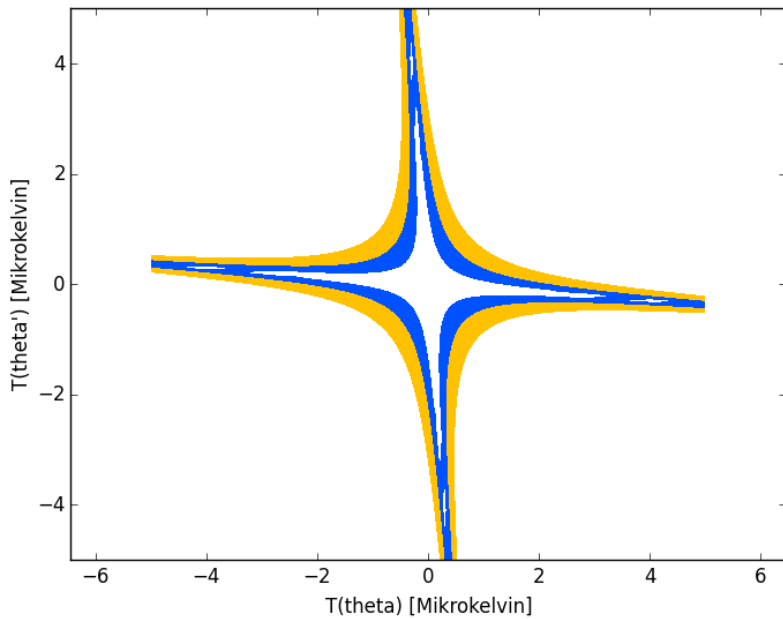


Abbildung 18: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des in Näherung gelinsten und ungelinsten CMB für $l=3$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^7 vergrößert.

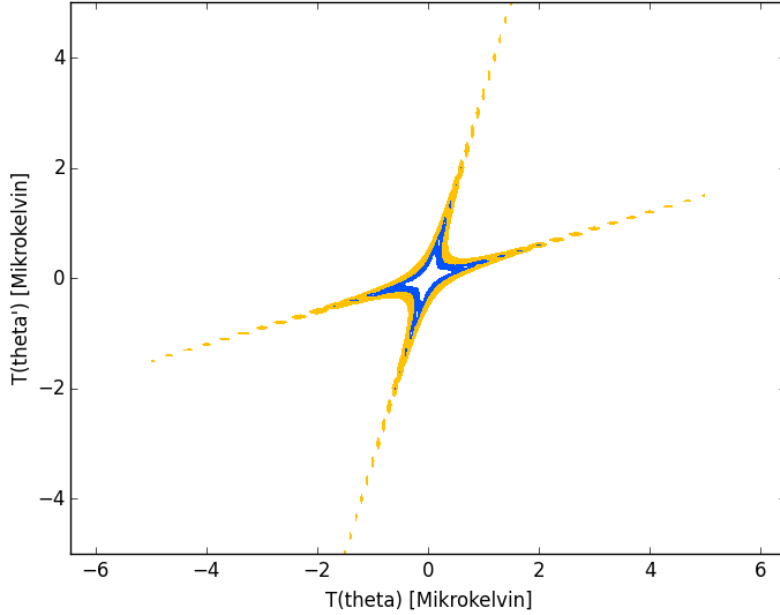


Abbildung 19: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des in Näherung gelinsten und ungelinsten CMB für $l=10$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^7 vergrößert.

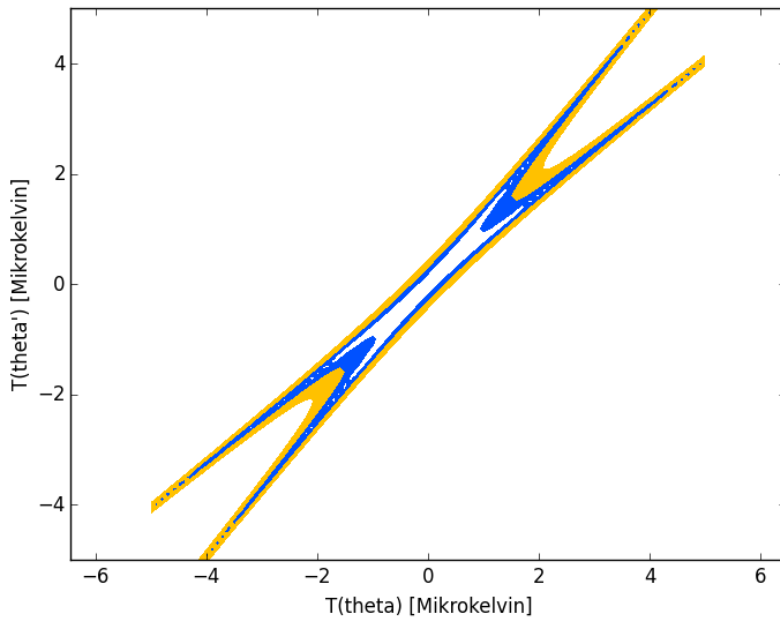


Abbildung 20: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des in Näherung gelinsten und ungelinsten CMB für $l=30$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^5 vergrößert.

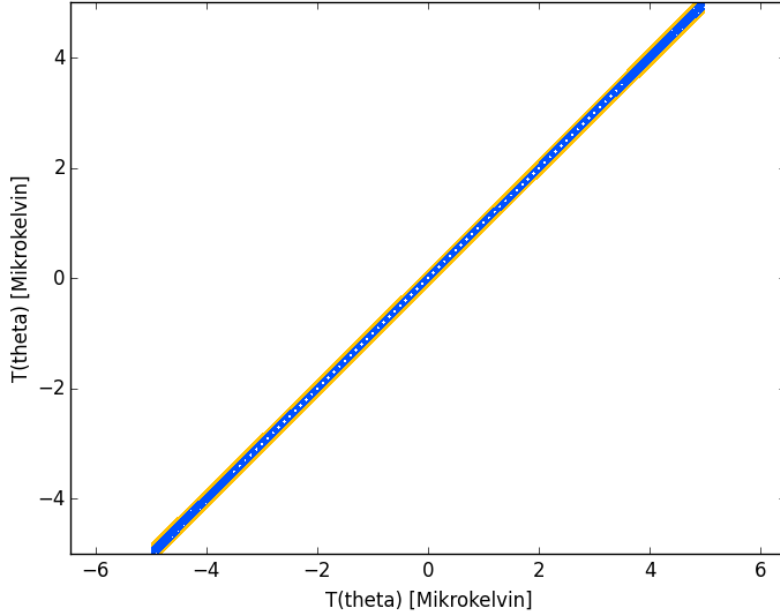


Abbildung 21: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des in Näherung gelinsten und ungünstigen CMB für $l=100$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^4 vergrößert.

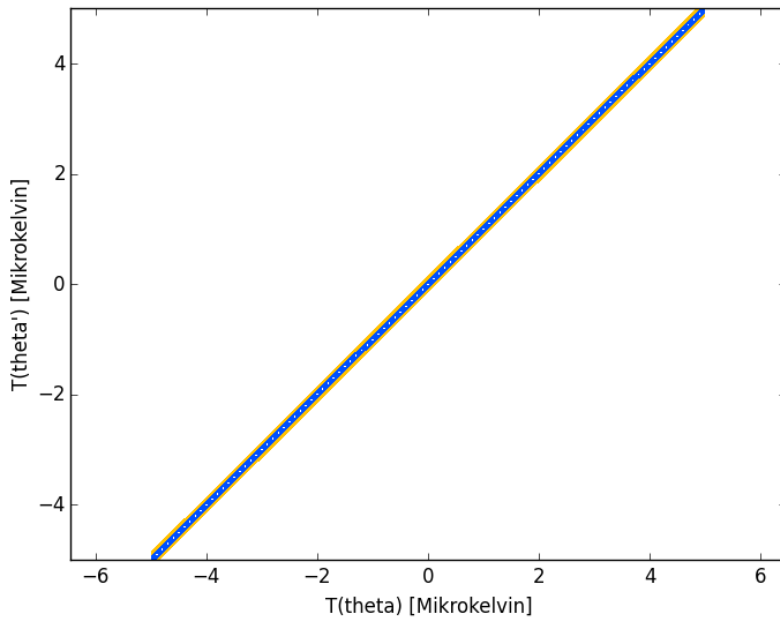


Abbildung 22: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des in Näherung gelinsten und ungünstigen CMB für $l=300$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^3 vergrößert.

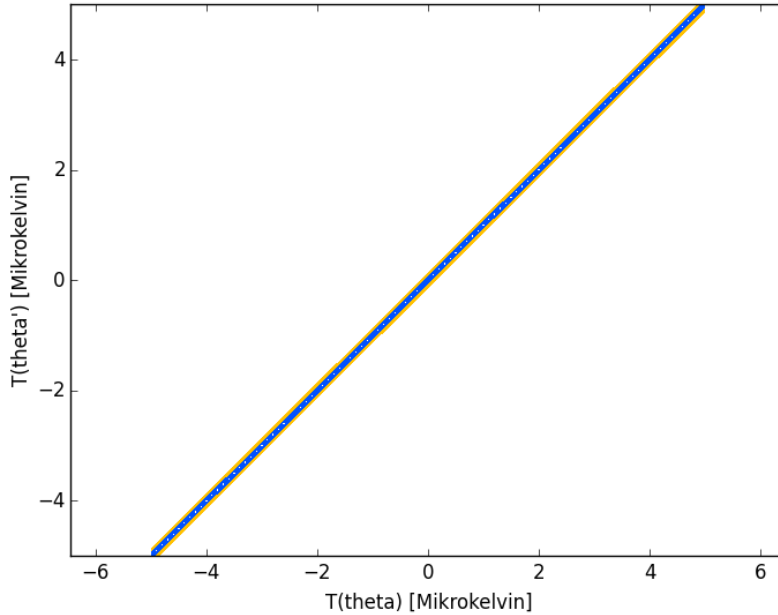


Abbildung 23: Betrag der Differenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des in Näherung gelinsten und ungelinsten CMB für $l=1000$. Die Differenz wurde um den Faktor 10^2 vergrößert.

5 Fazit

In dieser Bachelorarbeit wurde untersucht inwiefern der Gravitationslinseneffekt die Temperaturkorrelationsfunktion des CMB beeinflusst.

Sowohl beim direkten Vergleich der Korrelationsfunktionen als auch beim Vergleichen der Korrelationskoeffizienten sowie der Wahrscheinlichkeitsverteilungen konnte festgestellt werden, dass durch den Gravitationslinseneffekt die Temperaturkorrelation, wenn auch nur leicht, abnimmt. Somit erscheinen die Strukturen des CMB durch den Gravitationslinseneffekt unschärfer. Dieser Effekt kommt daher, dass die vom CMB ausgestrahlten Photonen durch den Gravitationslinseneffekt eine Art "random walk" vollführen.

Zusätzlich wurde aus dem Temperaturspektrum des ungelinsten CMB in niedrigster Ordnung die Temperaturkorrelationsfunktion des gelinsten CMB berechnet und sowohl mit der ungelinsten als auch mit der gelinsten Temperaturkorrelationsfunktion verglichen. Dabei ist aufgefallen, dass diese Näherung schon dazu führt, dass für kleine θ die Temperaturkorrelation des genäherten gelinsten kleiner als die des ungelinsten CMB ist. Allerdings wird durch diese Näherung für Winkelabstände unter $0,2$ die Korrelation des gelinsten CMB unterschätzt und für Winkelabstände größer $0,2$ wiederum überschätzt. Dies führt unter anderem dazu, dass in dieser Näherung der gelinste CMB für $l < 30$ größere Korrelationen aufweist als der ungelinste und somit auch größere Werte als der gelinste. Es wäre interessant zu sehen, wie sich dieses Verhalten ändert, wenn man den Exponenten in Gleichung 24 statt in nullter in erster Ordnung in $C_{gl_2}(\theta)$ entwickelt.

Literatur

- [1] A. Lewis, A. Challinor (2006) *Weak Gravitational Lensing of the CMB*. Physics Reports. 429 1-65
Available: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0601594> [13.09.2016].
- [2] D. Hanson, A. Challinor, A. Lewis *Weak lensing of the CMB*. Gen.Rel.Grav.42:2197-2218, 2010
Available: <http://arxiv.org/abs/0911.0612v1> [13.09.2016].
- [3] H. Risken *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications, Kapitel 2.3.3*
Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York Tokyo
- [4] A. Lewis, A. Challinor *Code for Anisotropies in the Microwave Background (CAMB)*
Available: http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_camb_form.cfm [13.09.2016].
- [5] Fixsen, D. J. (2009). *The Temperature of the Cosmic Microwave Background*. The Astrophysical Journal. 707:916–920.
Available: <https://arxiv.org/abs/0911.1955>
- [6] Wikipedia *Multivariate Verteilung*
Available: https://de.wikipedia.org/wiki/Multivariate_Verteilung [13.09.2016].
Wikipedia, Die freie Enzyklopädie
- [7] Wikipedia *Besselsche Differentialgleichung*
Available: https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung [13.09.2016].
Wikipedia, Die freie Enzyklopädie

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 19.09.2016,